浅析常数项级数敛散性的判别

常数项级数敛散性的判别是级数中比较基础同时也是比较重要的一个知识点，虽然出题频率没有幂级数高，但也是幂级数的基础，同时也是一个难点，原因在于整体内容的考察计较综合并且考察方式灵活，所以想掌握好常数项级数敛散性的判别一定要循序渐进，首先要把基础打牢。下面我们针对常数项级数中的具体级数判敛散的内容进行相关总结：

一、用定义判断级数敛散性：

（1）先求前 n 项和 $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$；

（2）再求极限 $\lim_{n\to\infty} S_n$：$\begin{cases} \text{极限存在，} & \text{级数收敛} \\ \text{极限不存在，} & \text{级数发散} \end{cases}$.

但是我们发现并不是所有的级数都可以求前 n 项和的，只有 “①有求和公式②能裂项变形的并且前后项相互抵消”这种特殊情况才会用到定义法。

二、用性质判断级数的敛散性

性质 1： 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 A 和 B，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n = A \pm B.$$

性质 2： 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 A，则 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = k\sum_{n=1}^{\infty} u_n = kA.$

性质 3： 去掉、增加或改变级数中的有限项不影响级数的收敛性.

性质 4： 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则在级数中任意加括号后所得级数仍然收敛且其和不变.

性质 5（级数收敛的必要条件）： 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

5 条性质中，针对具体级数判别敛散性，考试会更倾向于考察性质 5，主要用的是级数收敛的必要条件的逆否命题，即若 u_n 极限不存在或 u_n 极限存在但不等于零，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定发散。我们可以求通项的极限，如果通项的极限不存在或存在但不为 0，级数就是发散的。但如果通项的极限为 0，必要条件无法使用，就需要用到判别方法。

三、判别方法

1. 正项级数

（1）正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是它的部分和序列 $\{S_n\}$ 有界.

（2）比较审敛法

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，如果除了有限项以外，都有 $u_n \le v_n$ 成立，则

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\text{收敛} \Leftarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n\text{收敛} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n\text{发散} \Leftarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\text{发散} \end{cases}.$$

推论 1：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，假设存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有

$ku_n \le v_n (k>0)$ 成立，则 $\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\text{收敛} \Leftarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n\text{收敛} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n\text{发散} \Leftarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\text{发散} \end{cases}$.

推论 2（极限形式）：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\begin{cases} 0 & u_n\text{是高阶无穷小} \Rightarrow \begin{cases}\text{若}\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\text{发散，则}\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n\text{发散，}\\ \text{若}\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n\text{收敛，则}\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\text{收敛；}\end{cases} \\ l & u_n\text{与}v_n\text{同阶无穷小} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\text{与}\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n\text{同敛散；} \\ \infty & v_n\text{是高阶无穷小} \Rightarrow \begin{cases}\text{若}\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n\text{发散，则}\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\text{发散，}\\ \text{若}\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\text{收敛，则}\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n\text{收敛。}\end{cases} \end{cases}$$

其中 $(0<l<+\infty)$.

【注】（1）比较判别法：大收 $\Longrightarrow$ 小收；小发 $\Longrightarrow$ 大发

比较判别法和其极限形式本质上是比较，而两者比较必须有一个敛散性是已知的，也就是说，运用比较判别法判断收敛性的关键，在于需要有一个已知收敛性的简单级数，来作为比较的标准.即“标尺”.

（2）重要的“标尺”：

①等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$，$\begin{cases} |q|<1 & 收敛于\dfrac{a}{1-q} \\ |q|\geq 1 & 发散 \end{cases}$.

② p 级数，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 的收敛性：当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leq 1$ 时发散.

③ $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^p\ln^q n}$，$\begin{cases} p>1 & 收敛 \\ p=1,q>1 & 收敛 \\ p=1,q\leq 1 & 发散 \\ p<1 & 发散 \end{cases}$，可用于举反例.

（3）比值审敛法（达朗贝尔审敛法）

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l\begin{cases} <1 & 级数收敛 \\ >1 & 级数发散 \\ =1 & 不确定 \end{cases}.$$

（4）根值审敛法（柯西审敛法）

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l\begin{cases} <1 & 级数收敛 \\ >1 & 级数发散 \\ =1 & 不确定 \end{cases}.$$

【注】（1）比值审敛法和根值审敛法本质上也是比较，只不过是自我比较.（几何级数）

（2）何时用根值，何时用比值？

①若一般项 u_n 中有 $n!$，则用比值审敛法；

②若一般项 u_n 中有 a^n，无 $n!$，则用根值审敛法.

2.一般项级数

一般项级数中考察最多的就是交错级数，对于交错级数的敛散性判别使用莱布尼兹定理即可。

判断交错级数的敛散性步骤：

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \text{是正项级数，} \begin{cases} \text{若收敛} \Rightarrow \text{原级数绝对收敛} \\ \text{若发散} \xrightarrow{\text{莱布尼兹判别法}} \begin{cases} \text{收敛} \Rightarrow \text{原级数条件收敛} \\ \text{发散} \Rightarrow \text{原级数发散} \end{cases} \end{cases}.$$

附：交错级数的莱布尼兹定理

如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 满足如下条件：

a. $u_n \geq u_{n+1}, n=1,2,3,\cdots$；

b. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛.

以上为具体级数敛散性的判别方法，总的来说主要有 3 大类：1.定义法；2.性质；3.判别法。我们在学习每个知识点时，要了解它的考察方向和特点，形成一个系统的知识框架，这样在学习的过程中才能达到事半功倍的效果。