学习点拨：总结一般数列的几种常见考察方式及解法

一般数列通常会考查通项公式和求和公式的求解，其中通项公式的求解又可以分成两大类：已知递推公式求通项公式和已知求和公式求通项公式。

一、已知递推求 a_n、

这一类型的题目考察频次相对较高，出题形式是给出 a_1 和 $a_{n\ 1}$ 与 a_n 的递推式，要求求出通项公式或者某一项的值。常见的形式有以下三种：

（一）“ $a_{n\ 1} \ll Aa_n \quad C$ ”型（其中 $A\quad 1$ 且 $A\quad 0$，$C\quad 0$）

若 A 可取 1，这种类型表示的是等差数列；若 C 可取 0，这种类型表示的是等比数列，而当 $A\quad 1$ 且 $A\quad 0$，$C\quad 0$ 时，上面形式既非等差，又非等比，我们该如何处理呢？构造等比。构造 a_n 是以 a_1 为首项、A 为公比的等比数列，即 $a_{n\ 1} \quad \ll A(a_n \quad)$，整理得 $a_{n\ 1} \ll Aa_n \quad (A\quad 1)$，所以会有 $(A\quad 1) \quad \ll C$，得 $\ll \frac{C}{A\quad 1}$。这种方法我们称之为“待定系数法”。

【例题 1】数列 a_n 满足 $a_1 \ll 1$，$3a_{n\ 1} \quad a_n \quad 7 \ll 0$，则数列 a_n 的通项公式是（ ）.

（A）$\frac{7}{4} \quad \frac{3}{4}$ S $\frac{1}{3}$ ½ ¼ ¾ $^{n\ 1}$

（B）$\frac{7}{4} \quad \frac{3}{4}$ S $\frac{1}{3}$ ½ ¼ ¾ $^{n\ 1}$

（C）$\frac{7}{4} \quad \frac{3}{4}$ S $\frac{1}{3}$ ½ ¼ ¾ $^{n\ 1}$

（D）$\frac{7}{4} \quad \frac{3}{4}$ S $\frac{1}{3}$ ½ ¼ ¾ $^{n\ 1}$

（E）$\frac{3}{4}$ S $\frac{1}{3}$ ½ ¼ ¾ $^{n\ 1}$

【答案】C

【知识点】已知递推求$\{a_n\}$。

【解析】

根据题意可得$a_{n+1}=-\frac{1}{3}a_n-\frac{7}{3}$，其中$A=-\frac{1}{3}$，$C=-\frac{7}{3}$，可构造等比数列$\{a_n+\lambda\}$，由待定系数法，可求得$\lambda=\frac{C}{A-1}=\frac{7}{4}$，则$\left\{a_n+\frac{7}{4}\right\}$是以$a_1+\frac{7}{4}=\frac{3}{4}$为首项，以$-\frac{1}{3}$公比的等比数列，所以有$a_n+\frac{7}{4}=\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，得$a_n=-\frac{7}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$。故本题选择 C。

（二）“$a_{n+1}-a_n=f(n)$”型

$f(n)$ 即关于n的表达式，$a_{n+1}-a_n=f(n)$这种类型我们可以通过“仿写”，利用“累加法”求$\{a_n\}$。如$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=3n$，我们能够写出：

$a_1=1$

$a_2-a_1=3\times1$

$a_3-a_2=3\times2$

$a_4-a_3=3\times3$

……

$a_n-a_{n-1}=3(n-1)$

累加时以等号为界，等号左侧相加得a_n，等号右侧相加，可利用等差数列求和公式得$1+3[1+2+3+\cdots+(n-1)]=\frac{3n(n-1)}{2}+1$，即$a_n=\frac{3n(n-1)}{2}+1$。

（三）“$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$”型

这种类型我们可以通过“仿写”，利用“累乘法”求$\{a_n\}$。如$a_1=1$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3^n$，我们能够写出：

$a_1=1$

$\frac{a_2}{a_1}=3^1$

$\frac{a_3}{a_2}=3^2$

$\frac{a_4}{a_3}=3^3$

……

$\frac{a_n}{a_{n-1}}=3^{n-1}$

累乘时以等号为界，等号左侧相乘得 a_n，等号右侧相乘，可利用同底数幂运算法则得 $1\times3^1\times3^2\times3^3\times\cdots\times3^{n-1}=3^{\frac{n(n-1)}{2}}$，即 $a_n=3^{\frac{n(n-1)}{2}}$。

二、已知 S_n 求 $\{a_n\}$.

已知 S_n 求 $\{a_n\}$ 时，可以采用“退一相减法”：

$$a_n=\begin{cases}S_1 & n=1,\\ S_n-S_{n-1} & n\geq 2\end{cases}。$$

在使用退一相减法时，可以分为三步：（1）$n=1$ 时，利用 $a_1=S_1$，求出 a_1；（2）$n\geq 2$ 时，写出 S_{n-1}，利用 $a_n=S_n-S_{n-1}$，求得 a_n；（3）验证 $n=1$ 时的值是否符合 a_n 表达式，若不符合，写成分段形式，若符合，则可以只保留 a_n。

【例题 2】数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和满足 $S_n=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是（　　）.

（A）2^n

（B）$(-2)^{n-1}$

（C）$2n$

（D）$2n-1$

（E）n

【答案】B

【知识点】已知 S_n 求 $\{a_n\}$.

【解析】

根据题意可得，当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=\frac{2}{3}a_1+\frac{1}{3}$，$a_1=1$，当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}=\frac{2}{3}a_{n-1}+\frac{1}{3}$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{2}{3}a_n-\frac{2}{3}a_{n-1}$，整理得 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=-2$，则 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，-2 为公比

的等比数列，故 $a_n=(-2)^{n-1}$。故本题选择 B。

三、已知 $\{a_n\}$ 求 S_n

（一）“对应项和为定值”型

这种类型题目采用“倒序相加法”求解。提到倒序相加，很多同学可能更多想到的是等差数列求和，思考其本质，我们会发现，等差数列之所以能够使用倒序相加求和，是因为首尾相加所得到的和为定值，这里的首项和尾项、第二项与倒数第二项就可以看成对应项。如果数列中有对应项和为定值，我们便可以采用倒序相加的方式。

【例题 3】已知函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，则 $f(2016)+f(2015)+\cdots+f(2)+f(\frac{1}{2})+\cdots+f(\frac{1}{2015})+f(\frac{1}{2016})$ 的值为（　　）.

（A）2014

（B）2015

（C）2016

（D）2017

（E）2018

【答案】B

【知识点】一般数列求和

【解析】

根据题意可知 $f(\frac{1}{x})=\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{x^2}{1+x^2}$，此时有 $f(x)+f(\frac{1}{x})=1$，所以原式

$=f(2016)+f(\frac{1}{2016})+f(2015)+f(\frac{1}{2015})+\cdots+f(2)+f(\frac{1}{2})=2015\times 1=2015$。故本题选择 B。

（二）“差比数列”型

这种类型采用“错位相减法”求解。若$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，公比为$q(q\neq 1)$，数列$\{c_n\}$满足$c_n=a_n\cdot b_n$，则$\{c_n\}$差比数列。我们在做题时，先写出$\{c_n\}$的前n项和S_n，再写出qS_n，两式相减，即可求出S_n。如$S_n=1\times 2+3\times 2^2+5\times 2^3+7\times 2^4+9\times 2^5$，这里等比部分的公比是2，所以$2S_n=1\times 2^2+3\times 2^3+5\times 2^4+7\times 2^5+9\times 2^6$，用第一个式子减去第二个，即可得$-S_n=1\times 2+2\times 2^2+2\times 2^3+2\times 2^4+2\times 2^5-9\times 2^6$，得到这个算式后，我们发现，中间4项构成等比数列，利用等比数列求和公式就可以完成求解。

（三）“分式求和”型

这种类型采用“裂项相消法”求解。主要考察的是“裂差”，其原理是$\frac{b-a}{ab}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$，具体的考查的公式有两个：$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$与$\frac{1}{x(x+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+k}\right)$，后者亦可写成$\frac{k}{x(x+k)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+k}$。比如$\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3\times 7}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)$；“裂和”目前没有考察过，同学们可以对其基本原理简要了解$\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，如$\frac{3+4}{3\times 4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$。

相对前面两种求和类型，裂项相消考察的频率相对高一些，同学们需要明晰的是遇到分式求和，要能优先考虑到裂项，从而达到相消求和的目的。

【例题 4】(2012) 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2=4$，$a_4=8$，若$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{5}{21}$，则$n=$（　　）.

（A）16

（B）17

（C）19

（D）20

（E）21

【答案】D

【知识点】一般数列求和

【解析】

根据题意可求得等差数列$\{a_n\}$的首项为 2，公差为 2，所以 $a_n=2n$，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=$$

$$\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+2)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right)=$$

$$\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{k}{4(k+1)}=\frac{5}{21}$$ 。故本题选择 D。

一般数列出题特征明显，方法性较强，同学们在学习完成后，也要多对同类型的题目进行练习，做到熟练掌握。