浅析求解线性方程组通解的方法

线性方程组时线性代数的核心内容，无论从理论体系上来讲还是从历年考试情况来看，它在整个学科中都有着至关重要的作用。理论体系上，线性方程组是线性代数前半部分的理论核心，前面学到的行列式，矩阵以及秩和向量都是为线性方程组服务的，以线性方程组为线索，我们也能理清前半部分的知识框架体系，把主体知识结合成一个有机的整体。从历年考情来看，本部分也是考查的重点，无论考频上还是分值上，在线性代数各部分知识中都是最高的，多数情况下，线性方程组主要解决两个问题：一是解的判定，这部分包含解的存在性和唯一性两个问题；二是解的结构，包含齐次和非齐次线性方程组解的性质、齐次线性方程组的基础解系以及齐次和非齐次线性方程组通解等问题。以上知识点中，线性方程组通解的结构是难度较高的部分，在此，笔者浅析通解问题，希望可以帮助考生理解和掌握这部分知识内容。

一、齐次线性方程组

1、齐次线性方程组解的性质

定理：如果η_1和η_2均为齐次线性方程组$Ax=0$的两个解，则对于任意实数k_1，k_2，$k_1\eta_1+k_2\eta_2$仍为$Ax=0$的解。也即：η_1和η_2任意线性组合仍为$Ax=0$的解。

该定理还可以推广到多个向量的情况，假设：$\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n$均为$Ax=0$的解，则$\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n$的任意线性组合仍为$Ax=0$的解。

2、基础解系的定义

假设齐次线性方程组$Ax=0$有非零解，如果向量组$\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s$满足如下三个条件：

（1） $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s$都是$Ax=0$的解；

（2） $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s$线性无关；

（3） $Ax=0$的任意解都可以由$\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s$线性表示，

则称$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$为$Ax = 0$的基础解系，$Ax = 0$的通解可以表示为$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \ldots + k_s\xi_s$（$k_1, k_2, \ldots, k_s \in R$）。

注：1）基础解系就好比是齐次线性方程组解集中的一个代表，他所起到的作用就是可以表示方程所有的解，又因为基础解系所有的向量都在解集中，所以他们的任意线性组合仍然是这个方程的解，即其任意线性组合可以代表整个方程的通解。若基础解系线性相关，则其一定存在极大线性无关组，而向量组与其极大线性无关组是等价的，所以此时基础解系只需要取其极大线性无关组即可，所以基础解系线性无关是使得基础解系中所包含向量个数最少的一种情况；

2）求解基础解系是求解齐次及非齐次线性方程组通解的关键，是解的结构部分最重要的概念，其应该满足三个条件：a. 是$Ax = 0$的解；b. 线性无关；c. 可以表示其他所有解；

3）由于$Ax = 0$解集就是一个向量组，所以我们不难发现，基础解系是这个向量组中包含线性无关的向量个数最多的、可以表示其他所有向量的子向量组，也就是说：基础解系就是$Ax = 0$解集的极大线性无关组。

3、基础解系的存在性

定理： 设齐次线性方程组$Ax = 0$中系数矩阵 A 的秩$r(A) < n$，则齐次线性方程组$Ax = 0$的基础解系存在，并且任意一个基础解系中都包含$n - r(A)$个解向量。

注：1）由于方程组的系数矩阵不满秩，所以方程组中主元的个数为$r(A)$，自由变量的个数为$n - r(A)$，而自由变量的作用就是为了表示主元，所以此时数基础解系中所包含的向量个数应该等于自由变量的个数，用来表示清楚主元；

2）由于基础解系本质上就是$Ax = 0$解集的极大线性无关组，所以由极大线性无关组的性质可知，$Ax = 0$的任意$n - r(A)$个线性无关的解都是$Ax = 0$的基础解系；

3）由于此定理可知，基础解系所要满足的三个条件可以变更为：a. 是$Ax = 0$的解；b. 线性无关；c. 包含向量个数为$n - r(A)$；

4、基础解系的计算方法

求$Ax=0$的基础解系即找到$Ax=0$的$n-r(A)$个线性无关的解向量。

对于抽象型线性方程组，具体计算步骤为：

1）求$r(A)$；2）找到$n-r(A)$个解；3）证明所找的解线性无关；

对于数值型线性方程组，具体计算步骤为：

1）对系数矩阵 A 实施初等行变换化为阶梯形矩阵；

2）找到主元（每行第一个非零元），主元之外的变量为自由变量；

3）在此进行初等行变换，将阶梯形矩阵化为“行最简行”矩阵（主元所在列，除主元为 1 之外，其他元素均为 0）;

4）在上述方程中，分别另“自由变量”，其中一个为 1，其余为 0，依次进行到所有自由变量都赋值过一次 1，这样可以保证解向量是线性无关的，同时还可以保证基础解系所包含的向量个数为自由变量的个数；

5）主元取到各自由变量对应列主元所在位置元素的相反数即可。

二、非齐次线性方程组

1、非齐次线性方程组解的性质

1）如果η_1和η_2均为非齐次线性方程组$Ax=b$的两个解，则$\eta_1-\eta_2$为$Ax=0$的解。即“非齐-非齐=齐”；

2）如果η_3为非齐次线性方程组$Ax=b$的解，η_4为齐次线性方程组$Ax=0$的解，则$\eta_1+\eta_2$为非齐次线性方程组$Ax=b$的解。即“非齐+齐=非齐”；

2、非齐次线性方程组的通解

设$\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s$是齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，η_0为非齐次线性方程组$Ax=b$任意一个解，则非齐次线性方程组$Ax=b$的通解可以表示为：$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\dots+k_s\xi_s+\eta_0$，其中$k_1,k_2,\dots,k_s\in R$。

注：非齐次线性方程组的通解为其导出组的通解加上其任意一个特解。求非齐次线性方程组的通解，就需要先求出导出组的基础解系，再找到非齐次线性方程组的一个特解。即“非齐通=齐通+非齐特”。

以上，是笔者总结得齐次和非齐次线性方程组的通解解法，纵观以上过程，可以较容易

地得知，在求解二者通解的过程中，求出对应齐次线性方程组的基础解系是解题的关键，各位考生应重点掌握。