浅谈极限保号性的使用

在大家复习极限的时候，相信大家都碰到过关于极限保号性使用的问题，这类问题有个共同的特点——抽象，部分同学对这类题可用六个字概括：不理解，不会做。从近几年命题特点来看，对这类问题考查的概率还是比较大的，所以，对于这类题我们应该不抛弃，不放弃，今天来给大家简单分享一下保号性的使用，希望对大家理解保号性有所帮助。

首先，我们需要回顾一下保号性的定理内容：

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$ *，则* $\exists \delta > 0$ *，使得当* $x \in (x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$ *时，有* $f(x) > 0$*;（去极限号）*

此外，还有一个推论：

若 $\exists \delta > 0$*，使得当* $x \in (x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$ *时，有* $f(x) \geq 0$*，并且* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *存在，则* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geq 0$*.（加极限号）*

以上就是保号性的定理和推论内容，部分同学对保号性的内容不是很理解，这里可以用简单的一句话概括：保号性，保号性，保的是符号。在 x 附近（x 的去心领域），极限值大于 0，则去掉极限之后的函数值符号不变，也大于 0；在 x 附近（x 的去心领域），函数值大于等于 0，且极限存在（很重要），则加极限号之后符号也不变，极限值也大于等于 0；此外，大家应关注一下等号的取法，什么时候带等号，什么时候不带等号？去极限号不带等号，加极限号带等号。这个就是保号性简单的理解。

相信大家看到这里，对保号性有了一个初步的理解，但更为关键

的是，保号性如何应用到具体的题目中，怎样利用保号性群解题呢？下面我们通过几个例题跟大家简单分享一下。

首先，保号性在极值判断中使用较多，比如：

例 1 若$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$*，则*$x=a$*是否为*$f(x)$*的极值？如是，为极大值还是极小值。*

【分析：已知极限值去推是否为极值的题目，可以通过保号性结合极值定义去判断；】

【解】:由于$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-2<0$*，由极限保号性可知，在*$x\in(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$*时，有*$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$*，又由于*$(x-a)^2>0$*，因此，在*$x\in(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$*时，*$f(x)-f(a)<0$*，即*$f(x)<f(a)$*，由极值定义(局部范围内的最值)可知，*$f(a)$*在*$x\in(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$*内取得了局部范围内的最大值，即*$x=a$*为极大值点，极大值为*$f(a)$*。*

相信通过这道题大家对保号性的使用有了一定的理解，那么不妨做一下下面这道题：

例 2 若$f^{'}(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^{'}(x)}{x^3}=1$ *则，*$x=0$ *是否为极值点？*

以上这两道例题都是保号性在极值判断部分的应用，用到的都是去极限号，我们发现去极限号经常会得到函数的一些性质，比如函数值的性质，导数的性质等等，所以，关于保号性，我们经常使用去极限号来对函数做定性分析；

保号性除了去极限号这种形式之外，还有一种加极限号的形式。那么，加极限号又有那些应用呢？大家请看下面的这道例题：

例（2013-2-改）已知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$*存在，且*$lnx_n+\frac{1}{x_n}>1$*，*$lnx_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$*，求此极限*

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

【分析】已知x_n不等式，求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，那么我们需要在不等关系两端加极限号，这时需要注意，加极限号需要带等号。

【解】设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，在$lnx_n + \frac{1}{x_n} > 1$，$lnx_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ 两端取极限，同时令$n \to \infty$，可得：$\lim\limits_{n\to\infty} lnx_n + \frac{1}{x_n} \geq 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} lnx_n + \frac{1}{x_{n+1}} \leq 1$，

可得$lna + \frac{1}{a} \geq 1, lna + \frac{1}{a} \leq 1$，即$lna + \frac{1}{a} = 1$，解得$a = 1$，

即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

以上就是我们关于保号性使用的内容，希望对大家复习有所帮助。最后，祝大家备考顺利，考上理想的学校，加油！！！